

## I. NOMBRES ENTIERS NATURELS ET DIVISION EUCLIDIENNE.



## 1. NOMBRES ENTIERS NATURELS.

## DÉFINITION 1

Les **nombres entiers naturels** sont les nombres qui servent à compter ou à dénombrer des objets.

C'est l'ensemble  $\{0; 1; 2; 3; \dots; 10\,000; \dots\}$ . On le note  $\mathbb{N}$ .

Les nombres entiers naturels sont des nombres positifs. On peut les écrire sans placer un signe « + » devant : on peut par exemple écrire « 8 » ou « +8 ».

L'**arithmétique** est une branche des mathématiques qui étudie la science des nombres.

## 2. DIVISION EUCLIDIENNE.

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels tels que  $a > b$ .

Effectuer la division euclidienne de  $a$  par  $b$ , c'est trouver deux entiers  $q$  et  $r$  tels que :

$$a = b \times q + r \quad \text{et} \quad 0 \leq r < b.$$

L'entier  $q$  est appelé le **quotient** et  $r$  le **reste** de cette division euclidienne.

$$\begin{array}{r|l} \text{dividende} \rightarrow a & b \leftarrow \text{diviseur} \\ \dots & q \leftarrow \text{quotient} \\ \dots & \\ \text{reste} \rightarrow r & \end{array}$$

**Exemple:** Voici la division euclidienne de 52 par 3.

$$\begin{array}{r|l} 52 & 3 \\ 22 & 17 \\ 1 & \end{array}$$

On peut donc écrire 52 sous la forme :  $52 = 3 \times 17 + 1$ .

## 3. DIVISEURS ET MULTIPLES.

## DÉFINITION 2

Lorsque le reste de la division euclidienne d'un entier  $a$  par un entier  $b$  différent de 0 est nul (c'est-à-dire lorsque  $r = 0$ ), on peut écrire que  $a = b \times q + 0$  ou encore  $a = b \times q$ .

On dit alors que :

- $b$  est un **diviseur** de  $a$  (ou encore que  $a$  est **divisible** par  $b$ ) ;
- $a$  est un **multiple** de  $b$  (ou encore que  $b$  a pour **multiple**  $a$ ).

**Exemple:** On peut décomposer le nombre 18 sous la forme  $18 = 6 \times 3$ . Le reste de la division euclidienne de 18 par 3 est nul.

Donc on peut dire que « 18 est divisible par 3 » ou que « 3 divise 18 ».

 **Remarque:** Tout nombre est divisible par 1 et par lui-même.

## II. NOMBRES PREMIERS ET FRACTIONS IRRÉDUCTIBLES.



### DÉFINITION 3

Un nombre entier naturel est dit **premier** lorsqu'il admet exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.

### Exemples:

- i) 13 ne peut se décomposer en produit que sous la forme  $13 = 1 \times 13$ . Le nombre 13 ne possède que deux diviseurs : 1 et lui-même ; 13 est donc un nombre premier.
- ii) 18 admet comme diviseurs les nombres 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 et 18. Le nombre 18 n'est pas un nombre premier.

 **Remarques:**

- i) 0 et 1 ne sont pas des nombres premiers (*pourquoi?*).
- ii) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 et 29 sont les nombres premiers inférieurs à 30. Cette liste est à connaître par cœur !

### THÉORÈME

Tout nombre entier non premier supérieur à 2 peut s'écrire comme un produit de nombres premiers.

 **Remarque:** Ce théorème est appelé le « théorème fondamental de l'arithmétique ».

### Exemples:

- $18 = 2 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^2$  ;
- $231 = 3 \times 7 \times 11$  ;
- $2016 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7$  ;

- À l'aide des deux décompositions précédentes, nous pouvons simplifier la fraction  $\frac{231}{2016}$  en écrivant :

$$\frac{231}{2016} = \frac{3 \times 7 \times 11}{2^5 \times 3^2 \times 7} = \frac{11}{2^5 \times 3} = \frac{11}{96}.$$

La fraction  $\frac{11}{96}$  est **irréductible**.